02 Mouvements

Objectifs

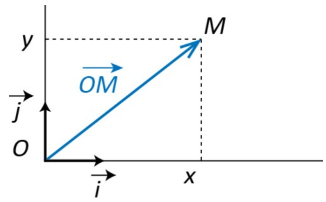
→ Citer et exploiter la relation entre les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération.

I. Position D’un Point

I.1. Repère D’étude

Définition

Pour repérer les positions d’un point en mouvement, le **référentiel** choisi doit être muni d’un **repère** (cartésien) dont l’origine O est immobile et les axes O_x et O_y munis de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



I.2. Le Vecteur-position

On appelle vecteur-position le vecteur qui relie l’origine du repère au point M étudié.

Ecriture

Ces deux écritures sont équivalentes : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

x et y sont les coordonnées du point M donc aussi celle du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$.

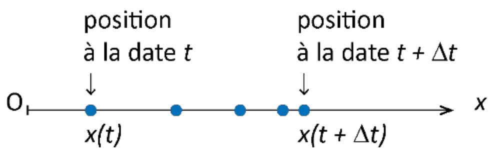
Remarques importantes :

- x et y sont aussi les coordonnées du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$
- Les coordonnées x et y du vecteur position sont homogènes à des distances et sont donc exprimées en mètre.
- En général un mouvement est à 3 dimensions, le vecteur position a donc 3 coordonnées. Mais ce ne sera jamais le cas au lycée.
- Il est très fréquent que l’axe vertical soit noté O_z et non pas O_y.

II. Vitesse D’un Point

II.1. Mouvements Rectilignes

On considère un point M en mouvement le long d’un axe O_x. À la date t il occupe la position de coordonnée x(t) et à la date t+Δt il occupe la position x(t+Δt). x(t+Δt)-x(t) est la distance qu’il a parcourue pendant la durée Δt.



Vitesse moyenne

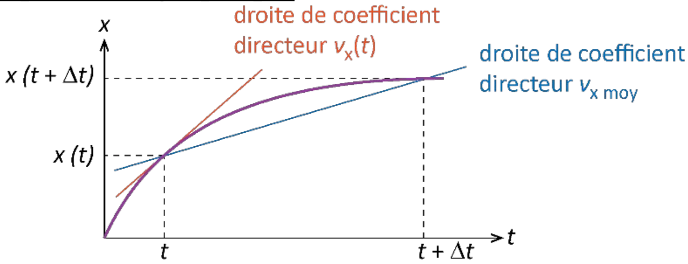
Sa vitesse moyenne vaut : $v_{x,moy} = \dfrac{d}{\Delta t} = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

Plus la durée Δt est courte, plus cette vitesse moyenne tend vers la valeur de la vitesse instantanée à la date t. Celle-ci vaut donc : $v_x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ D’après la définition mathématique vue en première, la vitesse instantanée à la date t est le nombre dérivé de la fonction x(t) à la date t.

Vitesse instantanée

La vitesse instantanée à l’instant t vaut : $v_x(t) = \dfrac{d\,x(t)}{dt}$ (écriture de sciences physiques)

🚀 *Pour aller plus loin* : Interprétation graphique



- La courbe violette représente l'évolution de x en fonction du temps.
- La droite bleue a pour coefficient directeur la vitesse moyenne du point étudié entre les dates t et t+Δt.
- La droite orange est tangente à la courbe représentant x(t). Elle a pour coefficient directeur la vitesse à la date, égale au nombre dérivé de x à la date t.

II.2. Généralisation

❤️ Vecteur vitesse

Le vecteur-vitesse d'un point en mouvement à la date t est un vecteur dont :
- le point d'origine est la position occupée par le point étudié à la date t;
- la direction et le sens sont ceux du mouvement du point étudié ;
- la valeur (ou norme) est la vitesse du point étudié à la date t.

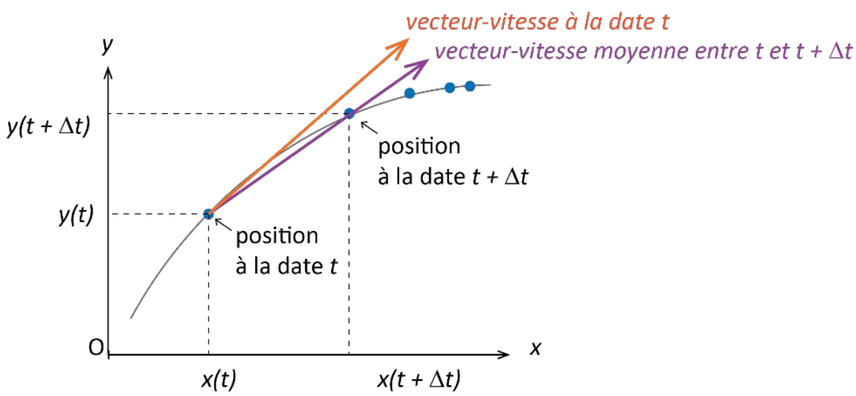
Dans le cas d'un mouvement plan, le vecteur-vitesse possède deux coordonnées dont les expressions sont les dérivées des coordonnées de position x et y.

❤️ Coordonnées du vecteur vitesse

Le vecteur-vitesse est la dérivée du vecteur position. $\vec{v}(t)=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} v_x(t)=\frac{dx}{dt}(t) \\ v_y(t)=\frac{dy}{dt}(t) \end{vmatrix}$

❤️ Tracé du vecteur vitesse

Le vecteur-vitesse à la date t peut être approximativement assimilé au vecteur-vitesse moyenne entre t et t+Δt si la durée Δt est suffisamment courte devant la durée du mouvement.



Vecteur-vitesse et valeur de la vitesse
La valeur de la vitesse à la date t est alors la norme du vecteur-vitesse : $v(t)=\|\vec{v}(t)\|=\sqrt{v_x{}^2(t)+v_y{}^2(t)}$

III. Accélération D'un Point

III.1. Mouvements Rectilignes

Reprenons la situation du **II.1.** . À la date t, l'objet occupe la position de coordonnée x(t) et est animé d'une vitesse de valeur $v_x(t)$. À la date t+Δt il occupe la position x(t+Δt) et est animé d'une vitesse de valeur $v_x(t+\Delta t)$.

Accélération moyenne

Accélération moyenne pendant la durée Δt vaut par définition : $a_{[x,moy]}=\dfrac{v_x(t+\Delta t)-v_x(t)}{\Delta t}$

Plus la durée Δt est courte, plus cette accélération moyenne tend vers la valeur de l'accélération instantanée à la date t. Celle-ci vaut donc : $a_x(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v_x(t+\Delta t)-v_x(t)}{\Delta t}$. L'accélération à la date t est donc le nombre dérivé de la fonction v_x à la date t.

Accélération moyenne

L'accélération instantanée à l'instant t vaut : $a_x(t)=\dfrac{d\,v_x(t)}{dt}$

Comme la fonction $v_x(t)$ est elle-même la fonction dérivée de la fonction x(t) (coordonnée de position), $a_{x(t)}$ est la fonction dérivée seconde de la fonction x(t). À une date donnée on a donc : $a_x(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

Remarques importantes :

- L'unité SI de l'accélération est le $m\cdot s^{-2}$, «mètre par seconde par seconde ».
- Sens physique de l'accélération
  - Si $a_{x,moy}=2\,m\cdot s^{-2}$: la vitesse v_x du point étudié augmente de $2\,m\cdot s^{-1}$ chaque seconde.
  - Si $a_{x,moy}=-2\,m\cdot s^{-2}$: la vitesse v_x du point étudié diminue de $2\,m\cdot s^{-1}$ chaque seconde.

III.2. Généralisation

Le vecteur-accélération est un vecteur qui traduit la variation du vecteur-vitesse en fonction du temps. Ses coordonnées sont donc les dérivées de celles du vecteur-vitesse, et donc les dérivées secondes des coordonnées de position.

Coordonnées du vecteur accélération

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}a_x(t)=\dfrac{dv_x}{dt}(t)=\dfrac{d^{2x}}{dt^2}(t)\\ a_y(t)=\dfrac{dv_y}{dt}(t)=\dfrac{d^{2y}}{dt^2}(t)\end{array}\right)$$

Remarques importantes :

- Le vecteur-accélération est la dérivée du vecteur vitesse, il dépend donc de sa variation globale, c'est à dire de la variation de sa direction ou/et de son sens ou/et de sa valeur.
- Le vecteur accélération est nul si aucune des propriétés du vecteur-vitesse ne varie : ni sa valeur, si sa direction, ni son sens. Le seul mouvement dont l'accélération est nulle est donc le mouvement rectiligne uniforme.

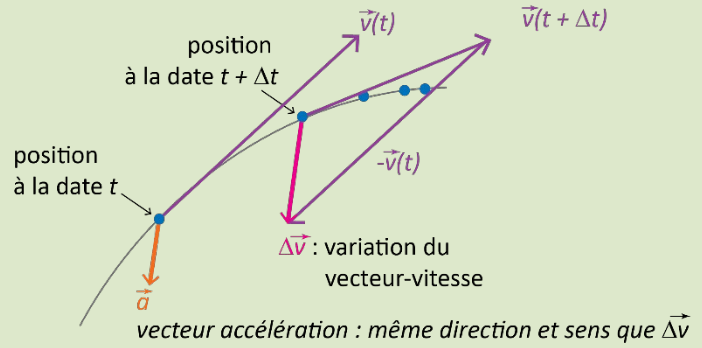
Tracé approché du vecteur-accélération

Le vecteur-accélération à la date peut être approximativement assimilé au vecteur-accélération moyenne entre les dates t et t+Δt : $\vec{a}(t) = \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}(t)}_{\text{relation exacte}} \approx \underbrace{\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}(t)}_{\text{approximation}}$

Cette approximation est d’autant plus juste que la durée Δt est courte.

Démonstration : Nouvelle expression de Q_r

On peut donc tracer le vecteur-accélération en utilisant une construction comme ci-dessous :



Voir activité 3 pour les tracés de vecteurs

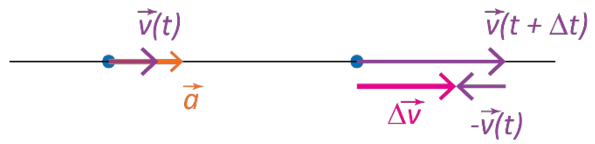
III.3. Vecteur-accélération De Quelques Mouvements Particuliers

Le mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un vecteur-vitesse constant (en valeur, direction et sens). Le vecteur-accélération est donc nul.

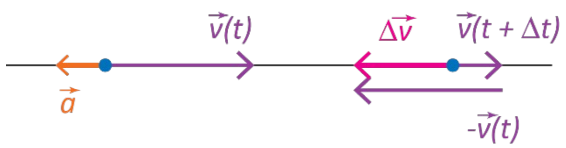
Le mouvement rectiligne accéléré

Le mouvement rectiligne accéléré est caractérisé par un vecteur-vitesse de direction et sens constants mais dont la valeur augmente au cours du temps. Le tracé montre donc que le vecteur-accélération est de même direction et de même sens que le vecteur-vitesse :



Le mouvement rectiligne « décéléré »

Le mouvement rectiligne accéléré est caractérisé par un vecteur-vitesse de direction et sens constants mais dont la valeur diminue au cours du temps. Le tracé montre donc que le vecteur-accélération est de même direction que le vecteur-vitesse mais de sens opposé :



Remarque : le mouvement décéléré est donc un mouvement accéléré particulier, dont le vecteur-accélération est de sens opposé au mouvement.

Le mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par un vecteur-vitesse de valeur constante mais dont la direction varie au cours du temps. Le tracé montre que le vecteur accélération est alors perpendiculaire au vecteur-vitesse :